⋆

Exercice 1 — **Voir correction**

Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et calculer sa valeur :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x}{2x^2+4}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{1} (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{3u}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,2\,\mathrm{d}u$

⋆

Exercice 2 — **Voir correction**

Pour chacune des intégrales suivantes, étudier sa nature selon la valeur du réel α :

1) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{1+t}{\sin^3(\pi t^\alpha/2)}}$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^\alpha}$

⋆

Exercice 3 — **Voir correction**

Soit X une variable aléatoire positive à densité qui admet une espérance. Le but de cet exercice est de montrer que dans ce cas l'espérance de X peut se calculer de la façon suivante :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geq x)\,\mathrm{d}x$$

On note F la fonction de répartition de X et f sa fonction de densité, et on suppose dans tout l'exercice que F est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

1) Soit A un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\int_0^{A} P(X \geq x)\,\mathrm{d}x = A - \int_0^{A} F(x)\,\mathrm{d}x$$

puis à l'aide d'une intégration par partie monter que

$$\int_0^{A} P(X \geq x)\,\mathrm{d}x = A - AF(A) + \int_0^{A} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

2) Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Quelle est sa valeur ?
3) Conclure.

⋆

Exercice 4 — **Voir correction**

Partie A : séries de Riemann convergentes

1) Soit $\alpha > 0$ un réel. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k; k+1]$ on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

3) En déduire la propriété des séries de Riemann : $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie B : deux équivalents

4) En reprenant l'encadrement de la question 2), montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

5) Soit $\lambda < 1$. Montrer que de même que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

6) Montrer que $(1,1)$ et $(3,2)$ sont les seules valeurs du couple de réels (α,β) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta$$

Partie C : cas général

7) Montrer que si f est une fonction continue décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, alors pour tout entier naturel n

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

8) En déduire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes).

9) Donner un contre exemple d'une fonction non monotone f telle que $\sum f(n)$ converge mais $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et un contre exemple d'une fonction non monotone g telle que $\sum g(n)$ diverge mais $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

10) En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a}{k^2+a^2}$

Partie D : transformation d'Abel

11) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) Soit x un réel qui n'est pas un multiple de 2π. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

13) En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq M$.

14) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$, et $S_0 = 0$. En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin n = S_n - S_{n-1}$ Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_0}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

15) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin n}{n}$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 3 :

1)

$$\begin{aligned}\int_0^A P(X \geq x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A (1 - P(X < x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^A 1\,\mathrm{d}x - \int_0^A F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= A - \int_0^A F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Puis en considérant que $F(x) = F(x) \times 1$ et en faisant une intégration par partie, avec $u(x) = F(x)$ et $v(x) = x$, toutes deux $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_0^A F(x)\,\mathrm{d}x &= [xF(x)]_0^A - \int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= AF(A) - \int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

puis en réinjectant cela dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^A P(X \geq x) &= A - \left(AF(A) - \int_0^A xf(x)\right) \\ &= A - AF(A) + \int_0^A xf(x)\end{aligned}$$

2) X admet une espérance donc par définition $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et X est positive donc f est nulle sur $]-\infty, 0]$, $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $E(X)$.

3) En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue question 1, le terme de droite a une limite donc le terme de gauche aussi et :

$$\int_0^{+\infty} P(X \geq x) = A - A + \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = E(X)$$

Correction de l'exercice 4 :

1) Comme $\alpha > 0$ la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante, donc si $k \leq t \leq k+1$ alors $k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$ et donc $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$.
En intégrant sur le segment $[k, k+1]$ où ces inégalités sont valables :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

donc par intégrales de fonctions constantes :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2) En sommant l'inégalité de droite pour k allant de 1 à n on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

ce qui donne l'inégalité de gauche dans l'encadrement désiré.

En sommant l'inégalité de gauche dans l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

puis en ajoutant $1 = \frac{1}{1^\alpha}$ de chaque côté on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne l'inégalité de droite dans l'encadrement désiré.

3) Si $\alpha > 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$.

La des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée par une suite convergente, donc majorée, donc elle converge car elle est croissante (somme partielle d'une série de terme génral positif).

Si $\alpha < 1$, alors $\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Si $\alpha = 1$, alors $\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc dès que $\alpha \leq 1$, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée par une suite qui tend vers $+\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$.

On a donc montré que $\alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{t^\alpha}$ converge et $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{t^\alpha}$ diverge, donc avec les contraposées on a bien $\sum \frac{1}{\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

4) D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

donc

$$\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

donc

$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

les deux bornes de l'encadrement convergent vers 1 lorsque $n \to +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$ autrement dit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

5) D'après la question 2, lorsque $0 < \lambda < 1$ on a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{(n+1)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \leq 1 + \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\lambda} - \frac{1}{n^{1-\lambda}} \leq \frac{1-\lambda}{n^{1-\lambda}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \leq \frac{1-\lambda}{n^{1-\lambda}} + 1$$

donc par encadrement, comme $1-\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\lambda}{n^{1-\lambda}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} = 1$ c'est à dire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \sim \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$

Si $\lambda \leq 0$, l'encadrement de la question 2 n'est plus valable et il faut tout reprendre :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \quad (k+1)^\lambda \leq t^\lambda \leq k^\lambda$$

donc

$$\frac{1}{k^\lambda} \leq \frac{1}{t^\lambda} \leq \frac{1}{(k+1)^\lambda}$$

puis en intégrant

$$\frac{1}{k^\lambda} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(k+1)^\lambda}$$

et en sommant l'inégalité de gauche :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t$$

puis celle de droite :

$$\int_1^{n} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\lambda}$$

donc

$$1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda}$$

d'où l'encadrement :

$$1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\lambda}$$

donc

$$1 + \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \leq \frac{(n+1)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}$$

d'où le même équivalent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

6) Pour $\alpha = \beta = 1$, l'égalité est trivialement vraie.
Pour $\alpha = 3$ et $\beta = 2$, on peut se souvenir (ou redémontrer par récurrence) la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

et on a aussi $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ donc il y a bien égalité pour le cas $(\alpha, \beta) = (3, 2)$.
Réciproquement, montrons que s'il y a égalité alors $(\alpha, \beta) \in \{(1,1), (3,2)\}$. On suppose donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta$$

Le membre de droite est égal à $\dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2^\beta}$ donc est équivalent à $\dfrac{n^{2\beta}}{2^\beta}$. Si $\beta < 0$, ce terme tend vers 0, alors que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers un réel strictement positif ou vers $+\infty$, selon la valeur de α. Il ne peut donc pas y avoir égalité si $\beta < 0$ donc $\beta \geq 0$.

Si $\beta = 0$, le membre de droite est constant égal à 1, et le membre de gauche n'est jamais constant, on a donc $\beta > 0$ (et donc nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^n k\right)^\beta = +\infty$)

Si $\alpha < -1$, alors $-\alpha > 1$ donc $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ converge, impossible car le membre de droite tend vers $+\infty$. On a donc $\alpha > -1$, donc $-\alpha < 1$ et le résultat de la question précédente s'applique :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

Par égalité on a donc :

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2\beta}}{2\beta}$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1+\alpha-2\beta} = \dfrac{1+\alpha}{2^\beta}$. Comme $\alpha > -1$, on a $\dfrac{1+\alpha}{2^\beta} \neq 0$ donc la seule possibilité est si $1+\alpha-2\beta = 0$, et on a alors $\dfrac{1+\alpha}{2^\beta} = 1$.

Si $\alpha = 2\beta - 1$, alors $\dfrac{1+\alpha}{2^\beta} = 1 \iff \dfrac{2\beta}{2^\beta} = 1$ donc $2\beta = 2^\beta$.

Posons $f(x) = 2^x - 2x = \mathrm{e}^{\ln(2)x} - 2x$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \ln(2)2^x - 2$. $f'(x) \geq 0 \iff \ln(2)2^x \geq 2 \iff 2^{x-1} \geq \frac{1}{\ln(2)} \iff (x-1) \geq \frac{1}{\ln(2)\ln(\ln(2))} \iff x \geq 1 + \dfrac{1}{\ln(2)\ln(\ln(2))}$

donc f est strictement décroissante puis strictement croissante sur $]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc au plus deux solutions. Or elle en admet au moins deux : $\beta = 1$ et $\beta = 2$, ce sont donc les seules solutions.

Si $\beta = 1$ alors $\alpha = 1$ et si $\beta = 2$ alors $\alpha = 3$, les seuls couples solutions du problème sont donc bien $(\alpha,\beta) = (1,1)$ et $(\alpha,\beta) = (3,2)$.

7) Comme dans les questions 1 et 2 il suffit d'écrire, par décroissance de f :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k,k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

donc en intégrant sur $[k,k+1]$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$$

puis en sommant pour k allant de 0 à $n-1$ dans l'inégalité de gauche et k allant de 0 à n dans l'inégalité de droite :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^n f(k)$$

donc en faisant un changement d'indice et en ajoutant $f(0)$ dans la première inégalité :

$$\sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'encadrement :

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

8) Comme f est décroissante, elle est soit positive sur $[0,+\infty[$, soit négative à partir d'une valeur x_0. On en déduit que suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang donc la suite $\sum_{k=0}^n f(k)$ est monotone à partir d'un certain rang.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors les suites $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc elle converge car elle est monotone à partir d'un certain rang.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend soit vers $+\infty$ soit vers $-\infty$ car f est de signe constant à partir d'une certaine valeur de x_0 de x (donc F est monotone à partir d'une certaine valeur x_0 de x). Alors les suites $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergent soit vers $+\infty$ soit vers $-\infty$, donc par comparaison, en utilisant l'une ou l'autre des inégalités de l'encadrement de la question 7 selon le cas, on a $\sum_{k=0}^n f(k)$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ donc la série $\sum f(n)$ diverge.

On a donc montré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

9) On peut construire une fonction f nulle en chaque entier $n \in \mathbb{N}$, mais dont l'intégrale diverge, par exemple :

$$f(x) = \sin(2\pi x)$$

On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sin(2\pi n) = 0$ donc $\sum f(n)$ converge, mais pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos(2\pi x)}{2\pi}\end{aligned}$$

qui n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$, donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
On peut ensuite construire une fonction g telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 1$ (donc $\sum g(n)$ diverge), mais telle que $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On peut par exemple poser, pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout $x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}[$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - k^2\,|x-k| & \text{si } x \in [k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec g nulle sur $[0, \frac{3}{4}]$. La courbe représentative de g est une suite de triangle de sommet $(k, 1)$ et de base le segment $[k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2}]$ sur l'axe des abscisse, avec g nulle entre chaque triangle.
On a donc pour tout $n \geq 2$, en notant $A_k = \int_{k-\frac{1}{k^2}}^{k+\frac{1}{k^2}} g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2 \times \frac{1}{k^2} \times 1}{2} = \frac{1}{k^2}$ l'aire du triangle en k, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{n+\frac{1}{n^2}} g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=2}^{n} A_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

donc $\int_0^{n+\frac{1}{n^2}} g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. g est positive donc $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ croit lorsque x croit donc admet aussi une limite lorsque x tend vers $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

10) La fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x^2 + a^2}$ est continue, décroissante sur $[0, +\infty[$ et positive sur cet intervalle, donc d'après la question 7 on a :

$$\int_0^{n+1} \frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{k^2+a^2} \leq \frac{a}{a^2} + \int_0^n \frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t/a)]_0^x = \arctan(x/a)$. Ainsi :

$$\arctan\left(\frac{n+1}{a}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{k^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n+1}{a}\right) = \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on a donc

$$\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{k^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{pi}{2}$$

donc

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2+a^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

et donc par encadrement $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$.

11) Comme $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, l'intégrale est faussement impropre en 0, l'intégrale
Pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\sin t}{t} &= \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\forall x > 0$, $|\cos(x)| \leq 1$ donc $\left|\dfrac{\cos(A)}{A}\right| \leq \dfrac{1}{A}$ donc par comparaison $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos(A)}{A} = 0$, et $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$, donc comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge on a par TCIFP que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge. Par somme de limites, $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque $A \to +\infty$. Finalement par somme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} &= \sum k = 0^{2n}\,\mathrm{e}^{i(k-n)x} \\ &= \mathrm{e}^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (\mathrm{e}^{ix})^k \\ &= \mathrm{e}^{-inx}\,\frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)x}\,{-1}}{\mathrm{e}^{ix-1}} \\ &= \mathrm{e}^{-inx}\,\frac{\mathrm{e}^{i(n+\frac12)x}\left(\mathrm{e}^{i(n+\frac12)x} - \mathrm{e}^{-i(n+\frac12)x}\right)}{\mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(n+\frac12)x} - \mathrm{e}^{-i(n+\frac12)x}}{\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2}} \\ &= \frac{2i\sin\left((n+\frac12)x\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac12)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

13) On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik} - \mathrm{e}^{-ik}}{2i}\right| \\ &= \left|\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right| \\ &= \left|\frac{\sin\left(n+\frac12\right)}{\sin\frac12}\right| \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac12\right)}\end{aligned}$$

donc pour $M = \dfrac{1}{\sin(1/2)}$ on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sum_{k=1}^{n} \sin k| \leq M$.

14) Pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(S_k - S_{k-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \frac{S_n}{n} - \frac{S_0}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

15) D'après la question 13 (S_n) est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$, et pour tout k on a :

$$
\begin{aligned}
\left|S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| &= |S_k| \times \frac{1}{k(k+1)} \\
&\leq \frac{M}{k(k+1)}
\end{aligned}
$$

$\frac{M}{k(k+1)} \sim \frac{M}{k^2}$ donc par TCPSP la série $\sum S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge, donc finalement par somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$ admet une limite lorsque $n \to +infty$ donc la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$ converge.